ÉNONCÉ

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $R_{A,i} := \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

1 $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overbrace{\{z \in \mathbb{C} \quad |z - a_{ii}| \leq R_{A,i}\}}^{D(a_{ii},\, R_{A,i})}$

2. Sq $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > R_{i,A}$ Alors $\det(A) \geq \prod (|a_{ii}| - R_{A,i})$

3. $A = C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. $\chi_{C_P}(X) = P(X)$.

LEÇONS.

149

153

RÉFS.

1. 2. [FGN2] Francinou Gianella Nicolas Alg 2 p. 80.

3. [Rb] Rombaldi. Alg et géom p. 684

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1.

2.

DÉMO

: à l'oral.

: écrit au tableau.

: pour comprendre.

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $R_{A,i} := \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

<u>PLAN</u> : ① si $|a_{ii}| > R_i$ $\forall i$, alors $A \in GL_n(\mathbb{C})$

② $Sp(A) \subset \bigcup D(|a_{ii}|, R_{A,i})$

→ appli

③ si $|a_{ii}| > R_{A,i}$ $\forall i$. alors $|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_{A,i})$

④ cas de Cp.

① sq sq $A \notin GL_n(\mathbb{C})$:

$\exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $AX = 0$.

ie $\forall i \in \{1..n\}$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$

D'où : on isole le terme d'indice i et passe à |·|

$|a_{ii} x_i| = |-\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \leq R_{A,i} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

Valable pour tout i : on va prendre un i intéressant :

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$, tq $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| > 0$ (car $X \neq 0$)

On obtient : $|a_{i_0 i_0}| \leq R_{A,i_0}$: absurde

Donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$. ∎

② Soit $\lambda \in Sp(A)$: quel lien entre valeurs propres et inversibilité ?

$A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C})$ donc par 1., $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii} - \lambda| \leq R_{i, A - \lambda I_n} = R_{i,A}$ → car on ne modif. que la diagon.

③ <u>Reformulation</u>

$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$.

multilinéarité du det

$\det(A) \geq \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_{A,i}) \Leftrightarrow \det \left[\underbrace{\begin{pmatrix} L_1 / (|a_{11}| - R_{A,1}) \\ \cdots \\ L_n / (|a_{nn}| - R_{A,n}) \end{pmatrix}}_{A' = (\alpha_{ij}) = \left(\frac{a_{ij}}{|a_{ii}| - R_{i,A}} \right)_{ij}} \right] \geq 1$.

simplif : et mettre même côté

pb car $\neq 0$ par hyp.

On veut appliquer ② : on va traduire notre pb en terme de vp.

$$|\det(A')| = \Big|\prod_{\lambda\in Sp(A')} \lambda^{\underbrace{m_\lambda(A')}_{\text{mult de } \chi_{A'}}}\Big|$$

≤ triag après

Or, par ②, $\forall \lambda \in Sp(A')$, $\exists i \in \{1..n\}$, $||\alpha_{ii}| - |\lambda|| \le |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |\alpha_{ij}|$

Nous on s'intéresse aux $|\lambda|$

Donc $|\lambda| \geq |\alpha_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$

$$\geq |\alpha_{ii}| - \sum_{j\neq i} |\alpha_{ij}| = \frac{|a_{ii}|}{||a_{ii}|-R_i|} - \sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{||a_{ii}|-R_{i,A}|}$$

$$= \frac{|a_{ii}|-R_{i,A}}{||a_{ii}|-R_{i,A}|}$$

facto par dénom + reconnaître.

$= 1$ car $|a_{ii}|-R_i > 0$ par hyp.

Donc $|\det(A')| \geq 1$.

Finalement, $|\det(A)| \geq \prod (|a_{ii}|-R_{i,A})$. ■

④ Soit $C_P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & 1 \;\, 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ $P = \sum a_i X^i + X^n$,

LEM : $\chi_{C_P} = P$

DEM :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & & & a_0 \\ -1 & t & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & -1 & t+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & t^2 & & & a_0 + t a_1 \\ -1 & t & & & \vdots \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & t+a_{n-1} \end{vmatrix} \quad l_1 \leftarrow l_1 + t l_2.$$

$= \dots$

on va de même annuler tous les coeffs 1e ligne sauf der où on voit app P

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & - & \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i + t^n \\ -1 & t & & & \\ & -1 & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & t+a_{n-1} \end{vmatrix} \quad l_1 \leftarrow l_1 + \sum_{i=3}^{n} t^{i-1} l_i$$

$$= (-1)^n P(t) \begin{vmatrix} -1 & t & & \\ & -1 & t & \\ & & \ddots & t \\ & & & -1 \end{vmatrix} \quad \text{dév } 1^e \text{ ligne}$$

$= (-1)^{2n} P(t)$.

Appli : $Sp(C_P) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ P(\lambda) = 0\} \subset D(-a_{n-1}, 1) \cup D(0, |a_0|) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} D(0, |a_i|+1)$

EXOS ASSOCIÉS

PROP : Sq $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} > R_{i}$. Alors $\det(A) \geq \prod (|a_{ii}| - R_{A,i})$ [PGN2]

Par (8), il suffit de mq $\det(A) > 0$. On va utiliser un argu de connexité

BUT : $\det(A) > 0$

$A \in \mathcal{C} := \{ B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1..n]\!],\ b_{ii} > \sum_{j \neq i} |b_{ij}| \}$

PR mq C est connexe, on va mq il est convexe donc connexe par arcs.

Mq $\mathcal{C}$ est convexe :

Soit $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{C}$, $t \in]0,1[$.

mq $(1-t)A + tB \in C$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j \neq i} |(1-t)a_{ij} + t b_{ij}| &\leq \sum_{j \neq i} \left((1-t)|a_{ij}| + t|b_{ij}|\right) \\
&\leq (1-t) \sum_{j \neq i} |a_{ij}| + t \sum_{j \neq i} |b_{ij}| \\
&< (1-t) a_{ii} + t b_{ii} \quad \text{car } A \text{ et } B \in C.
\end{aligned}$$

(l'image de C par appli conti est connexe)

Donc $(1-t)A + tB \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est convexe donc connexe.

Or, $\det : M \in \mathcal{C} \mapsto \det(M)$ conti donc $\det(\mathcal{C})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$

det ne s'annule pas sur $\mathcal{C}$ par 1 Donc $\det(C)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

Comme $I_n \in \mathcal{C}$ et $\det(I_n) = 1 > 0$, $\det(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}_+^*$

donc $\det(A) > 0$